УДК 519.65

А. Ю. Утешев, Г. Ш. Тамасян

К ЗАДАЧЕ ПОЛИНОМИАЛЬНОГО ИНТЕРПОЛИРОВАНИЯ С КРАТНЫМИ УЗЛАМИ*)

Задача. Построить полином $y = H(x)$, имеющий заданные значения и значения своих производных в узлах интерполяции $\{x_1, \dots, x_s\} \subset \mathbb{C}$:

$$\begin{array}{c} F(x_1), \dots, F^{(n_1-1)}(x_1), \\ F(x_2), \dots, F^{(n_2-1)}(x_2), \\ \dots \\ F(x_s), \dots, F^{(n_s-1)}(x_s). \end{array} \qquad (1)$$

Эта проблема возникла в начале XIX в. как обобщение интерполяционной формулы Лагранжа в задаче разложения рациональной дроби на простейшие. В дальнейшем потребность в ее решении возникала у Эрмита в задаче оценки величины определенного интеграла по заданным значениям подынтегральной функции и ее производных на концах интервала интегрирования [1, 2]. Именно Эрмит поставил задачу поиска полинома $H(x)$, минимально возможной степени удовлетворяющего таблице значений (1):

$$\deg H \leqslant n_1 + n_2 + \ldots + n_s - 1, \qquad (2)$$

и показал единственность такого полинома. Хотя в большинстве современных публикаций [3–6] данный полином называется интерполяционным полиномом Эрмита, но различные формы его записи вызвали к жизни названия «интерполяционный полином Серре» [7] и «интерполяционный полином Лагранжа–Сильвестра» [8]. В XX в. интерес к решению задачи стимулировался теорией матриц – при вычислениях аналитических функций от матриц, имеющих кратные собственные значения.

К сожалению, известное в настоящее время аналитическое представление полинома Эрмита весьма громоздко [4–6]:

Утешев Алексей Юрьевич – профессор кафедры математического моделирования энергетических систем факультета прикладной математики–процессов управления Санкт-Петербургского государственного университета. Количество опубликованных работ: 31. Научные направления: символьные (аналитические) алгоритмы для систем полиномиальных уравнений и неравенств, вычислительная геометрия. E-mail: Alexei.Uteshev@pobox.spbu.ru.

Тамасян Григорий Шаликович – доцент кафедры математической теории моделирования систем управления факультета прикладной математики–процессов управления Санкт-Петербургского государственного университета. Количество опубликованных работ: 17. Научные направления: недифференцируемая оптимизация, негладкий анализ, вариационное исчисление, теория управления, вычислительная геометрия. E-mail: grigoriytamasjan@mail.ru.

*) Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 09-01-00360).

$$H(x) = \sum_{j=1}^{s} \sum_{m=0}^{n_j-1} \sum_{q=0}^{n_j-1-m} \frac{F^{(m)}(x_j)}{m!q!}(x-x_j)^{m+q} \prod_{i\ne j}(x-x_i)^{n_i} \left\{ \frac{d^q}{dx^q} \frac{1}{\prod\limits_{\ell \ne j}(x-x_\ell)^{n_\ell}} \right\}_{x=x_j} \qquad (3)$$

и, как правило, используется для практических целей только при небольших значениях индексов: либо при $s = 2$, либо при $n_1 = \ldots = n_s = 2$.

В настоящей статье поставлена задача упрощения представления полинома Эрмита. Она достигается путем решения промежуточной задачи: построения полинома $G(x)$ произвольной степени, удовлетворяющего таблице значений (1). Будем называть его **обобщенным интерполяционным полиномом**. Заметим, что полином Эрмита получится из обобщенного интерполяционного в виде остатка от деления последнего на

$$W(x) = \prod_{j=1}^{s} (x-x_j)^{n_j} \ .$$

Положим

$$W_j(x) = \frac{W(x)}{(x-x_j)^{n_j}} \quad \text{при } j = \overline{1,s}.$$

Утверждение 1. *Существует набор полиномов* $\{u_1(x), \ldots, u_s(x)\} \subset \mathbb{C}[x]$, *удовлетворяющих тождеству*

$$u_1(x)W_1(x) + u_2(x)W_2(x) + \ldots + u_s(x)W_s(x) \equiv 1. \qquad (4)$$

При условии $\deg u_j < n_j$ $(j = \overline{1,s})$ *такой набор полиномов будет единственным; в этом случае полином* $u_j(x)$ *совпадает с отрезком ряда Тейлора разложения дроби* $\dfrac{1}{W_j(x)}$ *по степеням* $x - x_j$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Воспользуемся теоремой о разложении правильной рациональной дроби на сумму простейших [9, 10]: в качестве искомых полиномов можно взять числители разложения дроби

$$\frac{1}{W(x)} \equiv \frac{u_1(x)}{(x-x_1)^{n_1}} + \frac{u_2(x)}{(x-x_2)^{n_2}} + \ldots + \frac{u_s(x)}{(x-x_s)^{n_s}}$$

на сумму простейших. Из тождества (4) выразим $u_1(x)$:

$$u_1(x) \equiv \frac{1}{W_1(x)} - \frac{u_2(x)W_2(x) + \ldots + u_s(x)W_s(x)}{W_1(x)}.$$

Все полиномы $W_2(x), \ldots, W_s(x)$ имеют множителем $(x-x_1)^{n_1}$, поэтому при разложении правой части последнего тождества в ряд Тейлора по степеням $(x - x_1)$ члены степеней, меньших n_1, образуются только при разложении дроби $\dfrac{1}{W_1(x)}$. Таким образом, при ограничении $\deg u_1(x) < n_1$ полином u_1 однозначно определяется отрезком разложения функции $\dfrac{1}{W_1(x)}$ в ряд Тейлора по степеням $(x - x_1)$; в этом разложении рассматриваются члены степеней до $(n_1 - 1)$-й включительно.

Для остальных полиномов $u_j(x)$ доказательство проводится аналогично. ■

Обозначим при $j=\overline{1,s}$

$$f_j(x)=F(x_j)+\frac{F'(x_j)}{1!}(x-x_j)+\frac{F''(x_j)}{2!}(x-x_j)^2+\ldots$$
$$+\frac{F^{(n_j-1)}(x_j)}{(n_j-1)!}(x-x_j)^{n_j-1}. \quad (5)$$

Утверждение 2. *Полином*

$$G(x)=f_1(x)u_1(x)W_1(x)+f_2(x)u_2(x)W_2(x)+\ldots+f_s(x)u_s(x)W_s(x) \quad (6)$$

является обобщенным интерполяционным полиномом.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Покажем, что величины полинома $G(x)$ и его производных в точке x_1 определяются первой строчкой таблицы значений (1). Из (4) выразим $u_1(x)W_1(x)$ и подставим в (6):

$$G(x)=f_1(x)+[f_2(x)-f_1(x)]u_2(x)W_2(x)+\ldots+[f_s(x)-f_1(x)]u_s(x)W_s(x). \quad (7)$$

Все полиномы $W_2(x),\ldots,W_s(x)$ имеют множителем $(x-x_1)^{n_1}$, поэтому

$$G(x_1)=f_1(x_1),\ G'(x_1)=f_1'(x_1),\ldots,G^{(n_1-1)}(x_1)=f_1^{(n_1-1)}(x_1),$$

и по способу определения полинома $f_1(x)$ полученные значения совпадают с табличными.

Доказательство для остальных узлов интерполяции проводится по аналогии. ■

З а м е ч а н и е 1. Имеет место следующая оценка степени обобщенного интерполяционного полинома:

$$\deg G\leqslant n_1+\ldots+n_s-1+\max_{k=\overline{1,s}}n_k-1,$$

т. е. его степень, как правило, выше степени (2) полинома Эрмита.

Получим теперь явное представление для полиномов $u_j(x)$ $(j=\overline{1,s})$ из тождества (4).

Утверждение 3. *Имеет место представление $u_j(x)$ в виде*

$$u_j(x)=\frac{1}{W_j(x_j)}\sum_{0\leqslant k_1+\ldots+k_s-k_j\leqslant n_j-1}\prod_{\substack{\ell=1\\ \ell\neq j}}^{s}C_{n_\ell+k_\ell-1}^{k_\ell}\left(\frac{x_j-x}{x_j-x_\ell}\right)^{k_\ell}.$$

Здесь $C_N^M=N!/[M!(N-M)!]$ обозначает биномиальный коэффициент.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Воспользуемся второй частью утверждения 1. Найдем, к примеру, явное представление для $u_1(x)$. С этой целью разложим дробь

$$\frac{1}{W_1(x)}=\frac{1}{(x-x_2)^{n_2}\ldots(x-x_s)^{n_s}}$$

в ряд Тейлора по степеням $x-x_1$, ограничившись членами степеней, меньшими n_1.

Для каждой дроби $1/(x-x_j)^{n_j}$ $(j=\overline{2,s})$ выписываем формулу биномиального разложения

$$\frac{1}{(x-x_j)^{n_j}}=\frac{1}{(x_1-x_j)^{n_j}}\sum_{\ell=0}^{n_1-1}C_{n_j+\ell-1}^{\ell}\left(\frac{x_1-x}{x_1-x_j}\right)^{\ell}+\ldots$$

и перемножаем получившиеся произведения. Тогда

$$\frac{1}{W_1(x)} = \frac{1}{W_1(x_1)} \prod_{\ell=2}^{s} \sum_{k_\ell=0}^{n_1-1} C_{n_\ell+k_\ell-1}^{k_\ell} \left(\frac{x_1-x}{x_1-x_\ell}\right)^{k_\ell} + \ldots,$$

а поскольку $\deg u_1 < n_1$, получаем

$$u_1(x) = \frac{1}{W_1(x_1)} \sum_{0 \leqslant k_2+\ldots+k_s \leqslant n_1-1} \prod_{\ell=2}^{s} C_{n_\ell+k_\ell-1}^{k_\ell} \left(\frac{x_1-x}{x_1-x_\ell}\right)^{k_\ell}. \tag{8}$$

Из (8) в случае произвольного j имеем

$$u_j(x) = \frac{U_j(x)}{W_j(x_j)} \quad \text{при} \quad U_j(x) = \sum_{k=0}^{n_j-1} U_{jk}(x-x_j)^k \tag{9}$$

и

$$U_{jk} = \sum_{k_1+\ldots+k_s-k_j=k} \prod_{\substack{\ell=1\\ \ell\neq j}}^{s} \frac{C_{n_\ell+k_\ell-1}^{k_\ell}}{(x_\ell-x_j)^{k_\ell}}. \tag{10}$$

Очевидно, что для всех $j=\overline{1,s}$

$$U_{j0} = 1\ . \tag{11}$$

■

Следующее утверждение дает альтернативное представление для коэффициентов U_{jk}.

Утверждение 4. *Обозначим*

$$S_{jm} = \sum_{\substack{\ell=1\\ \ell\neq j}}^{s} \frac{n_\ell}{(x_\ell-x_j)^m} \tag{12}$$

для $j=\overline{1,s},\ m=\overline{1,n_j-1}$. *Тогда справедлива такая рекурсивная формула вычисления* U_{jk} *при* $k \geqslant 1$:

$$U_{jk} = \frac{1}{k}\sum_{m=1}^{k} S_{jm}U_{j,k-m}; \tag{13}$$

в ней, согласно (11), *считаем* $U_{j0}=1$.

Доказательство проиллюстрируем для случая $j=1$. На основании определения (9) полинома $U_1(x)$ получаем его в результате разложения дроби $W_1(x_1)/W_1(x)$ по степеням $x-x_1$; в этом разложении оставляем члены степеней до (n_1-1)-й включительно. Тогда в разложении произведения $W_1(x)U_1(x)/W_1(x_1)$ по степеням $x-x_1$ коэффициенты мономов $(x-x_1),(x-x_1)^2,\ldots,(x-x_1)^{n_1-1}$ должны обращаться в нуль при свободном члене, равном 1. Разложим полином $W_1(x)/W_1(x_1)$ по возрастающим степеням $x-x_1$:

$$\frac{W_1(x)}{W_1(x_1)} = 1+\omega_1(x-x_1)+\omega_2(x-x_1)^2+\ldots\ . \tag{14}$$

Получаем систему линейных уравнений

$$\begin{cases} U_{11} + \omega_1 U_{10} & = & 0, \\ U_{12} + \omega_1 U_{11} + \omega_2 U_{10} & = & 0, \\ \quad \dots & & \\ U_{1k} + \omega_1 U_{1,k-1} + \ldots + \omega_k U_{10} & = & 0. \end{cases} \qquad (15)$$

Выразим теперь коэффициенты $\omega_1, \ldots, \omega_k$ через $x_1, \ldots, x_s$. Имеем

$$W_1(x) \equiv (x - x_1 - (x_2 - x_1))^{n_2} \ldots (x - x_1 - (x_s - x_1))^{n_s} \ ,$$

и, с одной стороны, искомые коэффициенты получаются по формулам Виета. С другой стороны, формулы Виета не очень удобны в виду того обстоятельства, что интересуют коэффициенты при <u>возрастающих</u> степенях $x - x_1$. Потому воспользуемся другим подходом для их определения – через суммы Ньютона [8, 9]. Если ввести новую переменную $X = x - x_1$, то корнями полинома

$$(X - (x_2 - x_1))^{n_2} \ldots (X - (x_s - x_1))^{n_s}$$

будут числа $x_2 - x_1, \ldots, x_s - x_1$ в соответствующих кратностях. Выражения

$$n_2 (x_2 - x_1)^m + \ldots + n_s (x_s - x_1)^m$$

при натуральных m называются суммами Ньютона этого полинома. Имеются рекурсивные формулы (Ньютона), связывающие суммы Ньютона с коэффициентами полинома. В смысле такого определения, становится очевидным содержание введенного в условии теоремы обозначения (12): выражение

$$\frac{n_2}{(x_2 - x_1)^m} + \ldots + \frac{n_s}{(x_s - x_1)^m}$$

представляет собой сумму Ньютона для полинома

$$\left(Y - \frac{1}{(x_2 - x_1)} \right)^{n_2} \ldots \left(Y - \frac{1}{(x_s - x_1)} \right)^{n_s} .$$

Для получения выражений коэффициентов из (14) представим $W_1(x)/W_1(x_1)$ в виде

$$\frac{W_1(x)}{W_1(x_1)} \equiv \frac{1}{Y^{n_2 + \ldots + n_s}} \left(Y - \frac{1}{x_2 - x_1} \right)^{n_2} \ldots \left(Y - \frac{1}{x_s - x_1} \right)^{n_s} \ \text{при} \ Y = \frac{1}{x - x_1}$$

и для полинома по Y из правой части последнего тождества выписываем формулы Ньютона

$$\begin{cases} S_{11} + \omega_1 & = & 0, \\ S_{12} + \omega_1 S_{11} + 2\omega_2 & = & 0, \\ \quad \dots & & \\ S_{1k} + \omega_1 S_{1,k-1} + \ldots + \omega_{k-1} S_{11} + k\omega_k & = & 0. \end{cases} \qquad (16)$$

Итак, системы (15) и (16) позволяют вывести зависимость коэффициентов U_{1j} от величин (12) – осталось только избавиться от вспомогательных величин ω_ℓ. Сделаем это следующим приемом: дополним уравнения системы (16) последним уравнением системы (15) и перепишем получившиеся соотношения в матричном виде

$$\begin{pmatrix} S_{11} & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ S_{12} & S_{11} & 2 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ S_{13} & S_{12} & S_{11} & 3 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & & & & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & & & & \ddots & \vdots \\ S_{1k} & S_{1,k-1} & S_{1,k-2} & S_{1,k-3} & \dots & S_{11} & k \\ U_{1k} & U_{1,k-1} & U_{1,k-2} & U_{1,k-3} & \dots & U_{11} & U_{10} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ \omega_1 \\ \omega_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ \omega_{k-1} \\ \omega_k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Рассматриваемое в качестве однородной системы относительно указанного столбца переменных это матричное уравнение имеет нетривиальное решение и, следовательно, определитель матрицы должен обращаться в нуль:

$$\begin{vmatrix} S_{11} & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ S_{12} & S_{11} & 2 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ S_{13} & S_{12} & S_{11} & 3 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & & & & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & & & & \ddots & \vdots \\ S_{1k} & S_{1,k-1} & S_{1,k-2} & S_{1,k-3} & \dots & S_{11} & k \\ U_{1k} & U_{1,k-1} & U_{1,k-2} & U_{1,k-3} & \dots & U_{11} & U_{10} \end{vmatrix}_{(k+1)\times(k+1)} = 0\ . \qquad (17)$$

Разложением определителя по последней строке можно получить линейную зависимость U_{1k} от $U_{1,k-1}, U_{1,k-2}, , \dots, U_{10}$. Однако, для того чтобы показать ее эквивалентность соотношению (13), придется произвести некоторые дополнительные изыскания.

Будем доказывать справедливость представления (13) индукцией по k. Проверка справедливости этой формулы для $k = 1$ и $k = 2$ очевидна. Предположим, что эта формула справедлива при всех значениях индекса от 1 до $k-1$. Преобразуем определитель (17), вычтем из его последней строки первую, умноженную на $U_{1,k-1}/k$, вторую, умноженную на $U_{1,k-2}/k$, и т. д., k-тую, умноженную на U_{10}/k. Элементы последней строки получившегося определителя оказываются равными

$$\begin{aligned} & U_{1k} - \frac{1}{k}(S_{11}U_{1,k-1} + S_{12}U_{1,k-2} + S_{13}U_{1,k-3} + \dots + S_{1k}U_{10}), \\ & \frac{k-1}{k}U_{1,k-1} - \frac{1}{k}(S_{11}U_{1,k-2} + S_{12}U_{1,k-3} + \dots + S_{1,k-1}U_{10}), \\ & \frac{k-2}{k}U_{1,k-2} - \frac{1}{k}(S_{11}U_{1,k-3} + \dots + S_{1,k-2}U_{10}), \\ & \dots \\ & \frac{1}{k}U_{11} - \frac{1}{k}S_{11},\ 0. \end{aligned}$$

На основании индукционного предположения все выражения, кроме первого, обращаются в нуль. Раскладывая полученный определитель по последней строке, установим эквивалентность равенства (17) равенству

$$k!\left[U_{1k}-\frac{1}{k}(S_{11}U_{1,k-1}+S_{12}U_{1,k-2}+S_{13}U_{1,k-3}+\ldots+S_{1k}U_{10})\right]=0,$$

откуда и следует (13). ■

Формула (13) гораздо более удобна для вычислений в сравнении с формулой (10), которая содержит большое количество громоздких слагаемых с биномиальными коэффициентами.

Пример 1. Имеем

$$U_{j1}=S_{j1},\quad U_{j2}=\frac{1}{2}(S_{j1}^2+S_{j2}),\quad U_{j3}=\frac{1}{6}(S_{j1}^3+3S_{j2}S_{j1}+2S_{j1}^3).$$

Полученное в утверждении 2 выражение для обобщенного интерполяционного полинома $G(x)$ можно использовать для выведения представления интерполяционного полинома Эрмита $H(x)$. Действительно, как отмечалось выше, $H(x)$ является остатком от деления полинома $G(x)$ на $W(x)$. Применяя представление (6), получаем, что этот остаток равен сумме остатков от деления полиномов $f_j(x)u_j(x)W_j(x)$ на $W(x)$, каждый из которых, в свою очередь, представи́м в виде $r_j(x)W_j(x)$, где $r_j(x)$ означает остаток от деления $f_j(x)u_j(x)$ на $(x-x_j)^{n_j}$, т. е.

$$H(x)=r_1(x)W_1(x)+\ldots+r_s(x)W_s(x).$$

Имея явные представления (5) для полинома $f_j(x)$ и (9) для полинома $u_j(x)$, приходим к следующему результату.

Утверждение 5. *Интерполяционный полином Эрмита вычисляется по формуле*

$$H(x)=\sum_{j=1}^{s}\frac{W_j(x)}{W_j(x_j)}\sum_{0\leqslant k+\ell\leqslant n_j-1}\frac{F^{(k)}(x_j)}{k!}U_{j\ell}(x-x_j)^{k+\ell}\ . \tag{18}$$

Ее можно переписать в следующем виде:

$$H(x)=\sum_{j=1}^{s}\frac{W_j(x)}{W_j(x_j)}\sum_{k=0}^{n_j-1}\frac{F^{(k)}(x_j)}{k!}\sum_{\ell=0}^{n_j-1-k}U_{j\ell}(x-x_j)^{k+\ell}=$$

$$=\sum_{j=1}^{s}\sum_{k=0}^{n_j-1}\sum_{\ell=0}^{n_j-1-k}\frac{F^{(k)}(x_j)}{k!}W_j(x)(x-x_j)^{k+\ell}\frac{U_{j\ell}}{W_j(x_j)}.$$

Это представление эквивалентно формуле (3), поскольку

$$\frac{1}{k!}\left\{\frac{d^k}{dx^k}\frac{1}{\prod\limits_{\ell\neq j}(x-x_\ell)^{n_\ell}}\right\}_{x=x_j}\equiv\frac{U_{jk}}{W_j(x_j)}.$$

Однако для приложений более удобен другой вариант формулы (18). Введем в рассмотрение следующую операцию. Для представленного по формуле Тейлора полинома $f(x)=a_0+a_1(x-x_*)+a_2(x-x_*)^2+\ldots+a_n(x-x_*)^n$ обозначим

$$f^{[k]}(x) = a_0 + a_1(x-x_*) + a_2(x-x_*)^2 + \ldots + a_{n-k}(x-x_*)^{n-k}$$

при $k=\overline{1,n}$ и будем считать $f^{[0]}(x) \equiv f(x)$.

Следствие 1. *Интерполяционный полином Эрмита можно представить в виде*

$$H(x) = \sum_{j=1}^{s} \frac{W_j(x)}{W_j(x_j)} \sum_{k=0}^{n_j-1} \frac{F^{(k)}(x_j)}{k!} U_j^{[k]}(x)(x-x_j)^k \ . \tag{19}$$

Пример 2. Легко заметить, что при $n_1 = n_2 = \ldots = n_s = 1$ полином $H(x)$ становится интерполяционным полиномом в форме Лагранжа.

При $n_1 = n_2 = \ldots = n_s = 2$ получаем

$$H(x) = \sum_{j=1}^{s} \frac{W_j(x)}{W_j(x_j)} \left[F(x_j) + (x-x_j)\left(F'(x_j) + 2F(x_j) \sum_{\substack{\ell=1\\ \ell\neq j}}^{s} \frac{1}{x_\ell - x_j} \right) \right] =$$

$$= \sum_{j=1}^{s} \frac{W_j(x)}{W_j(x_j)} \left[F(x_j) \left(1 + 2(x-x_j) \sum_{\substack{\ell=1\\ \ell\neq j}}^{s} \frac{1}{x_\ell - x_j} \right) + F'(x_j)(x-x_j) \right].$$

Пример 3. Найти интерполяционный полином Эрмита по следующей таблице:

x_j	-1	0	1	2
$F(x_j)$	16	7	8	217
$F'(x_j)$		-1	-4	1375
$F''(x_j)$		6	-44	
$F'''(x_j)$			-126	

Для этого примера имеем: $s = 4, n_1 = 1, n_2 = 3, n_3 = 4, n_4 = 2$. Для нахождения полиномов $U_j(x)$ по формуле (9) потребуются выражения для их коэффициентов U_{jk} из формул (13). Приведем подробные вычисления коэффициентов полинома $U_3(x)$:

$$S_{3,1} = \frac{n_1}{x_1-x_3} + \frac{n_2}{x_2-x_3} + \frac{n_4}{x_4-x_3} = \frac{1}{-2} + \frac{3}{-1} + \frac{2}{1} = -\frac{3}{2},$$

$$S_{3,2} = \frac{n_1}{(x_1-x_3)^2} + \frac{n_2}{(x_2-x_3)^2} + \frac{n_4}{(x_4-x_3)^2} = \frac{21}{4},$$

$$S_{3,3} = \frac{n_1}{(x_1-x_3)^3} + \frac{n_2}{(x_2-x_3)^3} + \frac{n_4}{(x_4-x_3)^3} = -\frac{9}{8} \ .$$

Тогда

$$U_{3,0} = 1, \quad U_{3,1} = S_{3,1} = -\frac{3}{2}, \quad U_{3,2} = \frac{1}{2}(S_{3,2} + U_{3,1}S_{3,1}) = \frac{15}{4},$$

$$U_{3,3} = \frac{1}{3}(S_{3,3} + S_{3,2}U_{3,1} + S_{3,1}U_{3,2}) = -\frac{39}{8}$$

и, следовательно,

$$U_3(x) = 1 - \frac{3}{2}(x-1) + \frac{15}{4}(x-1)^2 - \frac{39}{8}(x-1)^3.$$

Аналогично находим остальные полиномы:

$$U_1(x) = 1, \quad U_2(x) = 1 + 4\,x + \frac{43}{4}\,x^2, \quad U_4(x) = 1 - \frac{35}{6}(x-2).$$

Обобщенный интерполяционный полином получаем по формуле (6) при

$$W_1(x) = x^3(x-1)^4(x-2)^2, \quad W_2(x) = (x+1)(x-1)^4(x-2)^2,$$
$$W_3(x) = (x+1)x^3(x-2)^2, \quad W_4(x) = (x+1)x^3(x-1)^4,$$

$f_1(x) = 16, f_2(x) = 7 - x + 3\,x^2,\ f_3(x) = 11 - 23\,x + 41\,x^2 - 21\,x^3,\ f_4(x) = -2533 + 1375\,x.$ Из (6) имеем

$$G(x) = \frac{819}{16}\,x^{12} - \frac{3507}{8}\,x^{11} + \frac{10522}{9}\,x^{10} - \frac{24709}{144}\,x^9 - \frac{69505}{16}\,x^8 + \frac{27775}{4}\,x^7 - \\ - \frac{37493}{24}\,x^6 - \frac{244079}{48}\,x^5 + \frac{168767}{36}\,x^4 - \frac{45065}{36}\,x^3 + 3\,x^2 - x + 7,$$

и полином Эрмита равен остатку от деления полученного полинома на

$$W(x) = (x+1)x^3(x-1)^4(x-2)^2.$$

Проиллюстрируем сейчас алгоритм непосредственного построения полинома $H(x)$ – т. е. без промежуточного нахождения $G(x)$. В самом деле, для полинома Эрмита имеется представление (19):

$$H(x) = \frac{W_1(x)}{W_1(-1)}\left[U_1(x)F(-1)\right] + \frac{W_2(x)}{W_2(0)}\left[U_2(x)F(0) + (1+4\,x)F'(0)x + \frac{F''(0)}{2}x^2\right] + \\ + \frac{W_3(x)}{W_3(1)}\Big[U_3(x)F(1) + (1 - \frac{3}{2}(x-1) + \frac{15}{4}(x-1)^2)F'(1)(x-1) + \\ + \left(1 - \frac{3}{2}(x-1)\right)\frac{F''(1)}{2}(x-1)^2 + \frac{F'''(1)}{6}(x-1)^3\Big] + \\ + \frac{W_4(x)}{W_4(2)}\left[U_4(x)F(2) + F'(2)(x-2)\right] \equiv \\ \equiv 2x^9 - 3x^8 - 4x^5 + 5x^4 - x^3 + 3x^2 - x + 7.$$

Еще одно упрощение представления полинома Эрмита основано на формуле (7): она позволяет сэкономить на вычислении полинома $u_1(x)$. Если в этой формуле в качестве первого узла интерполяции взять тот, что соответствует $\min\limits_{k=\overline{1,s}} n_k$, и переразложить $f_1(x)$ по степеням $x - x_j$:

$$f_1(x) \equiv \sum_{k=0}^{n_1-1} a_{kj}(x-x_j)^k$$

для $j \in \overline{2,s}$, то аналогом формулы (19) будет

$$H(x) = f_1(x) + \sum_{j=2}^{s} \frac{W_j(x)}{W_j(x_j)} \sum_{k=0}^{n_j-1} \left(\frac{F^{(k)}(x_j)}{k!} - a_{kj}\right) U_j^{[k]}(x)(x-x_j)^k\ ;$$

здесь полагаем $a_{kj} = 0$ для всех $k = \overline{n_1, n_j - 1}$ при $n_j > n_1$.

Пример 4. При $s = 2$ и $n_1 = n_2 = n$ имеем

$$H(x) = f_1(x) + \frac{(x - x_1)^n}{(x_2 - x_1)^n} \sum_{k=0}^{n-1} \left(\frac{F^{(k)}(x_2)}{k!} - a_k \right) (x - x_2)^k \sum_{m=0}^{n-1-k} \frac{C_{n+m-1}^m}{(x_1 - x_2)^m} (x - x_2)^m,$$

здесь через $a_0, \ldots, a_{n-1}$ обозначены коэффициенты разложения полинома $f_1(x)$ по степеням $x - x_2$.

Пример 5. В примере 3 имеем $n_1 = 1$, $f_1(x) \equiv 16$ и в использовавшихся обозначениях находим

$$\begin{aligned} H(x) = f_1(x) + \frac{W_2(x)}{W_2(0)} \left[U_2(x)(F(0) - 16) + (1 + 4\,x)F'(0)x + \frac{F''(0)}{2} x^2 \right] + \\ + \frac{W_3(x)}{W_3(1)} \big[U_3(x)(F(1) - 16) + (1 - \frac{3}{2}(x-1) + \frac{15}{4}(x-1)^2)F'(1)(x-1) + \\ + (1 - \frac{3}{2}(x-1)) \frac{F''(1)}{2}(x-1)^2 + \frac{F'''(1)}{6}(x-1)^3 \big] + \\ + \frac{W_4(x)}{W_4(2)} \left[U_4(x)(F(2) - 16) + F'(2)(x-2) \right] \equiv \\ \equiv 2x^9 - 3x^8 - 4x^5 + 5x^4 - x^3 + 3x^2 - x + 7. \end{aligned}$$

Литература

1. *Hermite Ch.* Sur la formule d'interpolation de Lagrange // J. f. d. reine u. angew. Mathematik. 1878. Vol. 84. P. 70–79 (см. также: *Hermite Ch.* "Oeuvres" Gauthier-Villars. Paris, 1912. Vol. 3. P. 432–443).

2. *Крылов В. И.* Приближенное вычисление интегралов. М.: Наука, 1967. 500 с.

3. *Mejiering E.* A chronology of interpolation: from ancient astronomy to modern signal and image processing // Proc. of the IEEE. 2002. Vol. 90, N 3. P. 319–342.

4. *Калиткин Н. Н.* Численные методы. М.: Наука, 1978. 512 с.

5. *Березин И. С., Жидков Н. П.* Методы вычислений: в 2 т. М.: Наука, Гл. ред. физ-мат. лит-ры, 1959. Т. 1. 464 с.

6. *Самарский А. А., Гулин А. В.* Численные методы: учеб. пособие для вузов. М.: Наука, Гл. ред. физ-мат. лит-ры, 1989. 432 с.

7. *Серре И. А.* Курс дифференциального и интегрального исчислений. СПб.; М.: Изд-во Вольф, 1883. Т. 1. 573 с.

8. *Гантмахер Ф. Р.* Теория матриц. М.: Физматлит, 2004. 560 с.

9. *Утешев А. Ю., Калинина Е. А.* Лекции по высшей алгебре. Ч. II: учеб. пособие. СПб.: Соло, 2007. 279 с.

10. *Фаддеев Д. К.* Лекции по алгебре: учеб. пособие для вузов. М.: Наука, Гл. ред. физ.-мат. лит-ры, 1984. 416 с.

Статья рекомендована к печати проф. В. Ф. Демьяновым.

Статья принята к печати 1 апреля 2010 г.