

Литература

1. Лионс Ж.-Л. Оптимальное управление системами, описываемыми уравнениями с частными производными. М., 1972.
2. Ладыженская О. А., Солонников В. А., Уралъцева Н. Н. Линейные и квазилинейные уравнения параболического типа. М., 1967.
3. Новоженев М. М., Сумин В. И., Сумин М. И. Методы оптимального управления системами математической физики: Учебн. пособие. Горький, 1986.
4. Сумин М. И. // Дифференц. уравнения. 1989. Т. 25, № 8. С. 1406—1416.
5. Сумин М. И. Автореф. дис. ... канд. физ.-мат. наук. Горький, 1983.

Нижегородский государственный университет
им. Н. И. Лобачевского

Поступила в редакцию
17 апреля 1990 г.

УДК 517.925.44

А. Ю. УТЕШЕВ

ВЫЧИСЛЕНИЕ ИНДЕКСА КРОНЕКЕРА — ПУАНКАРЕ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ КРИВЫХ ОТНОСИТЕЛЬНО АЛГЕБРАИЧЕСКИХ ПОЛЕЙ НА ПЛОСКОСТИ

1. Постановка задачи. На плоскости (x, y) рассмотрим векторное поле $(P(x, y), Q(x, y))$ и замкнутую жорданову кривую K , заданную уравнением $\Phi(x, y) = 0$. P, Q, Φ — полиномы, имеющие (как и все полиномы в дальнейшем) только вещественные коэффициенты. На K нет особых точек поля, внутренность K определяется неравенством $\Phi < 0$ и $(\partial\Phi/\partial x)^2 + (\partial\Phi/\partial y)^2 \neq 0$ на K .

Индекс Кронекера — Пуанкаре $j_K(P, Q)$ обычно [1, 2] предлагается вычислять с помощью криволинейного интеграла. В настоящей статье предлагается чисто алгебраический алгоритм вычисления индекса, использующий конечное число элементарных алгебраических операций над коэффициентами полиномов P, Q, Φ .

Обозначим

$$\Phi_i(x, y) = \frac{\partial\Phi}{\partial x} P + \frac{\partial\Phi}{\partial y} Q, \quad \Phi_{ii}(x, y) = \frac{\partial\Phi_i}{\partial x} P + \frac{\partial\Phi_i}{\partial y} Q.$$

Вещественное решение системы $\Phi = \Phi_i = 0$ определяет точку, в которой происходит касание поля (P, Q) с кривой K : внутреннее, если $\Phi_{ii} < 0$, и внешнее, если $\Phi_{ii} > 0$ в этой точке.

Теорема 1 [2, с. 212] (Пуанкаре). Если I — число внутренних, а E — внешних касаний поля (P, Q) с кривой K , то $j_K(P, Q) = I + (I - E)/2$.

Числа I и E можно определить с помощью следующего метода.

2. Метод Эрмита отделения вещественных решений системы алгебраических уравнений [3, 4]. Для изложения метода нам потребуются следующие три теоремы. Пусть $a_0 \neq 0, b_0 \neq 0$ и

$$f(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \dots + a_n, \quad g(x) = b_0 x^m + b_1 x^{m-1} + \dots + b_m.$$

Теорема 2 [5]. $f(x)$ и $g(x)$ имеют общие корни тогда и только тогда, когда их результат

$$\mathcal{R}(f, g) = \begin{vmatrix} a_0 & & & b_0 & & \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & a_0 & \cdot & \cdot & b_0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ & & & b_m & \cdot & \cdot \\ a_n & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & a_n & \cdot & \cdot & b_m \end{vmatrix} \quad (1)$$

m столбцов n столбцов

(элементы выше a_0, b_0 и ниже a_n, b_m равны нулю) обращается в нуль.

Следствие. $f(x)$ имеет кратные корни тогда и только тогда, когда дискриминант $\mathcal{D}(f) = \mathcal{R}(f, f')$ обращается в нуль.

Теорема 3 [5]. Существуют и определяются единственным образом полиномы $p(x)$ и $q(x)$ такие, что $\deg p < m, \deg q < n$ и $f(x)p(x) + g(x)q(x) \equiv \mathcal{R}(f, g)$. $p(x)$ равен определителю, получающемуся при замене в (1) последней строки на $(x^{m-1}, x^{m-2}, \dots, 1, 0, \dots, 0)$, $q(x)$ равен определителю, получающемуся при замене в (1) последней строки на $(0, \dots, 0, x^{n-1}, x^{n-2}, \dots, 1)$.

Теорема 4 [3] (Якоби). Число всех различных корней $f(x)$ равно рангу, а число различных вещественных корней равно сигнатуре матрицы $[s_{j+k}]_{j,k=0}^{n-1}$ где $s_0 = n, s_1 =$

$$= -a_1/a_0, s_j = -\left(ja_j + \sum_{k=1}^{j-1} a_k s_{j-k} \right) / a_0 \quad (j < n), \quad s_j = -\left(\sum_{k=1}^n a_k s_{j-k} \right) / a_0 \quad (j \geq n) \text{ — суммы}$$

Ньютона полинома f .

Сформулируем теперь основную задачу настоящего пункта.

Задача. Для системы

$$f_1(x, y) = 0, \quad f_2(x, y) = 0 \quad (2)$$

определить число ее вещественных решений, удовлетворяющих неравенству $g(x, y) > 0$ (это число будем обозначать $\text{prg}(g > 0)$).

Здесь f_1, f_2, g — полиномы, $\deg f_i = n_i$, и будем считать, что коэффициенты при x^{n_i}, y^{n_i} в разложении f_i по степеням x и y отличны от нуля. Разложим f_1 и f_2 по степеням y и составим результат этих полиномов (как полиномов от y). Обозначим его $X(x)$ (исключая y). Аналогичным образом, исключая x , построим $Y(y)$. В общем случае $N = \deg X = \deg Y = n_1 n_2$, что в дальнейшем и предполагается. Тогда система (2) имеет N решений (α_j, β_j) , среди которых могут быть и совпадающие (теорема Безу). α_j является корнем $X(x)$, β_j — корнем $Y(y)$; обратно, для любого корня $X(x)$ существует хотя бы один корень $Y(y)$ такой, что получившаяся пара является решением (2). Если $(a + ib, \beta)$ ($b \neq 0$) — решение (2), то и $(a - ib, \beta)$ — тоже решение, такие решения назовем комплексно-сопряженными. Если при этом $\beta \in \mathbf{R}$, то оно является кратным корнем $Y(y)$.

Предположение 1. Пусть $Y(y)$ не имеет кратных корней ($\mathcal{D}(Y) \neq 0$). Тогда число $2q$ комплексно-сопряженных решений (2) совпадает с числом комплексно-сопряженных корней $Y(y)$ и может быть определено по теореме 4.

Составим квадратичную форму

$$H = \sum_{k, l=0}^{N-1} C_{k+l} x_k x_l = \sum_{j=1}^N g(\alpha_j, \beta_j) [x_0 + x_1 \beta_j + x_2 \beta_j^2 + \dots + x_{N-1} \beta_j^{N-1}]^2. \quad (3)$$

$$\text{Здесь } x_i \in \mathbf{R}, \quad C_p = \sum_{j=1}^N g(\alpha_j, \beta_j) \beta_j^p.$$

Теорема 5 (Эрмита). Число положительных квадратов формы H равно $q + \text{prg}(g > 0)$.

Следствие. $\det[C_{k+l}]_{k, l=0}^{N-1} = \mathcal{D}(Y) \left(\prod_{j=1}^N g(\alpha_j, \beta_j) \right) / A_0^{2N-2}$, и это равенство позволяет (при выполнении предположения 1) проверить условие, чтобы на кривой $g(x, y) = 0$ не было решений системы (2), а следовательно, условия на кривую K в п. 1.

Выражения C_p являются симметрическими полиномами от решений системы (2), они могут быть представлены в виде рациональных функций от коэффициентов f_1 и f_2 . Для этого воспользуемся методом Якоби. По теореме 3 существуют и определяются единственным образом полиномы $\mathcal{M}, \mathcal{N}, \mathcal{P}, \mathcal{Q}$ от x и y такие, что

$$\deg_x \mathcal{M} < n_2, \quad \deg_y \mathcal{N} < n_1, \quad \deg_x \mathcal{P} < n_2, \quad \deg_x \mathcal{Q} < n_1,$$

$$\mathcal{M} f_1 + \mathcal{N} f_2 \equiv X(x), \quad \mathcal{P} f_1 + \mathcal{Q} f_2 \equiv Y(y).$$

Обозначим $V(x, y) = \mathcal{M}\mathcal{Q} - \mathcal{N}\mathcal{P}$ и якобиан f_1 и f_2 :

$$G(f_1, f_2) = \partial f_1 / \partial x \cdot \partial f_2 / \partial y - \partial f_1 / \partial y \cdot \partial f_2 / \partial x.$$

Разложим функцию $1/X(x)$ в ряд Лорана по степеням x^{-1} : если $X(x) = A_0 x^N + A_1 x^{N-1} + \dots + A_N$, $A_0 \neq 0$, то $1/X(x) = d_0 x^{-N} + d_1 x^{-N-1} + \dots$ и $A_0 d_0 = 1$, $A_1 d_0 + A_0 d_1 = 0, \dots$,

$$A_N d_0 + A_{N-1} d_1 + \dots + A_0 d_N = 0, \quad A_N d_k + A_{N-1} d_{k+1} + \dots + A_0 d_{N+k} = 0 \quad (k > 0).$$

Аналогично разложим $1/Y(y)$.

Теорема 6 [6] (Якоби). Коэффициент при $x^{-k-1} y^{-l-1}$ в разложении функции

$$G(f_1, f_2) V(x, y) / (X(x) Y(y)) \text{ по степеням } x^{-1}, y^{-1} \text{ равен } \sum_{j=1}^N \alpha_j^k \beta_j^l.$$

3. Вычисление индекса. На основании теорем 1 и 5 имеем следующий результат.

Теорема 7. $j_K(P, Q) = 1 - \sigma/2$, где σ — сигнатура формы (3), составленной для системы $f_1 \equiv \Phi = 0, f_2 \equiv \Phi_t = 0$ и при $g \equiv \Phi_{tt}$.

Пример. Пусть $P = x^2 + y^2 - y - 3x$, $Q = y^2 - 6xy - x^2 + 11y + 7x - 12$, а кривая K задана уравнением $\Phi = x^2 + y^2 - 6x = 0$. Вычислим $j_K(P, Q)$.

Здесь

$$\Phi_t = 2[x^3 + y^3 - 5xy^2 - x^2y + 8y^2 - 6x^2 + 6xy - 9y + 9x],$$

$$\Phi_{tt} = 2[(26x^2 - 82y^2 - 8xy - 60x + 10y + 246)\Phi + (25 - 11x)\Phi_t + \tilde{\Phi}_{tt}],$$

где $\tilde{\Phi}_{tt} = 80(y^4 - 2,25xy^2 - 1,15xy - 6,4y^2 + 10,8x + 1,875y + 1,35)$. Значения Φ_{tt} и $2\tilde{\Phi}_{tt}$ на решениях системы $\Phi = \Phi_t = 0$ совпадают. Для удобства разделим Φ_t на 2 и $2\tilde{\Phi}_{tt}$ на 160 (нас интересуют только знаки $\tilde{\Phi}_{tt}$), сохранив за получившимися выражениями исходные обозначения. К системе $\Phi = \Phi_t = 0$ применим алгоритм п. 2. Составляем результат Q и Φ_t (исключая x): $Y(y) = 40(y^5 - y^4 - 9,2y^3 + 7,2y^2 + 14,85y - 12,15)y$. С помощью теоремы

4 убеждаемся, что все корни β_i полинома $Y(y)$ вещественны и различны. Предположение 1 удовлетворено. Осталось вычислить сигнатуру формы (3) с матрицей $[C_{k+l}]_{k,l=0}^5$. Коэффициенты C_p ($p=0, \dots, 10$) вычислим по теореме 6: $C_0=53,925$; $C_1=-5,475$; $C_2=-16,17$; $\dots$; $C_{10}=-111182,0945911$ (все числа точные). Выражения для главных миноров: ($\Delta_0=1$), $\Delta_1=C_0$; $\Delta_2=3990,942$; $\Delta_3 \approx -646238,2363$; $\Delta_4 \approx 1075956207$; $\Delta_5 \approx 2796006657 \times 10^2$; $\Delta_6 \approx -1994747029 \cdot 10^3$. Сигнатура $\sigma=0$ и по теореме 7 $j_K(P, Q)=1$.

4. Возможное обобщение на $\mathbb{R}^3$. Метод Эрмита очевидным образом обобщается на систему из трех алгебраических уравнений от трех переменных [4] (метод Якоби обобщен в [7]). Однако нам не известен аналог теоремы 1 в $\mathbb{R}^3$.

В одном случае все же удастся наметить возможный путь решения. Для этого укажем еще один способ вычисления $j_K(P, Q)$, справедливый в том случае, когда все особые точки поля невырождены, т. е. якобиан $G(P, Q)$ не обращается в нуль ни в одной из них (по поводу проверки этого условия см. следствие к теореме 5).

Теорема 8 [1]. $j_K(P, Q)$ равен сумме индексов особых точек, лежащих внутри K .

Теорема 9 [1]. Индекс невырожденной особой точки равен $\text{sign } G(P, Q)$ (якобиан вычислен в этой точке).

Тогда справедлива следующая теорема.

Теорема 10. $j_K(P, Q) = \text{nrs}(\Phi < 0, G > 0) - \text{nrs}(\Phi < 0, G < 0)$ (здесь рассматриваются вещественные решения системы $P=Q=0$).

Число $\text{nrs}(g_1 > 0, g_2 > 0)$ для системы (2) можно найти по формуле

$$\text{nrs}(g_1 > 0, g_2 > 0) = [\text{nrs}(g_1 > 0) + \text{nrs}(g_2 > 0) - \text{nrs}(g_1 g_2 < 0)]/2,$$

т. е. свести задачу к решенной в п. 2 [8].

Следствие к теореме 10. $j_K(P, Q) = \text{nrs}(G > 0) - \text{nrs}(\Phi G > 0)$.

Мы получили еще один способ решения задачи (по сути дела, способ вычисления характеристики Кронекера системы функций Φ, P, Q [9, с. 284]). И этот способ уже допускает обобщение на $\mathbb{R}^3$, поскольку справедливы аналоги теорем 8 и 9 [1].

И. К. Ткаченко запрограммировал метод Эрмита и проделал все вычисления к примеру, автор выражает ему благодарность.

Литература

1. Красносельский М. А., Забрейко П. П. Геометрические методы нелинейного анализа. М., 1975.
2. Хартман Ф. Обыкновенные дифференциальные уравнения. М., 1970.
3. Крейн М., Неймарк М. Метод симметрических и эрмитовых форм в теории отделения корней алгебраических уравнений. Харьков, 1936.
4. Утешев А. Ю., Шуляк С. Г. Метод Эрмита отделения решений систем алгебраических уравнений и его применение к задачам качественной теории дифференциальных уравнений. Л., 1989. Деп. в ВИНТИ 18.10.89, № 6319—В89.
5. Фаддеев Д. К. Лекции по алгебре. М., 1984.
6. Jacobi C. G. J. // J. reine und angew. Math. 1835. Bd 14. S. 281—288.
7. Escherich G. von // Denkschriften, Abt. 2, Österr. Akad. Wiss., Math.-naturwiss. Kl. 1876. Bd 36. S. 251—272.
8. Горушкина Е. А. О знакоопределенности однородного полинома при ограничениях в виде однородных полиномиальных уравнений и неравенств. Л., 1990. Деп. в ВИНТИ 09.07.90, № 3786—В90.
9. Четаев Н. Г. Устойчивость движения. Работы по аналитической механике. М., 1962.

Ленинградский государственный
университет

Поступила в редакцию
24 апреля 1990 г.

УДК 517.927.25

М. А. МУСТАФИН

УСЛОВИЕ МАКЕНХОУПТА И УСЛОВИЕ В. А. ИЛЬИНА В ВОПРОСЕ БАЗИСНОСТИ СИСТЕМ ЭКСПОНЕНТ

В. А. Ильиным в работе [1] установлены необходимые и достаточные условия базисности систем корневых (собственных и присоединенных) функций обыкновенного несамосопряженного дифференциального оператора любого порядка n в пространстве L_p с произвольным p из интервала $1 < p < \infty$, а также необходимые и достаточные условия равносходимости с тригонометрическим рядом Фурье спектральных разложений по указанным системам для произвольной функции из класса L_p при $1 \leq p < \infty$.

Рассмотрим на произвольном ограниченном интервале G действительной оси обыкновенный несамосопряженный оператор порядка

$$\mathcal{L}u = u^{(n)} + p_1(x)u^{(n-1)} + p_2(x)u^{(n-2)} + \dots + p_n(x)u, \quad (1)$$